

Teorie k početní části

Matematika 1, 2023/24
výťah teorie ze cvičení

Limita posloupnosti

Definice. Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a $L \in \mathbb{R}$. Řekneme, že L je *vlastní limita posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : |a_n - L| < \varepsilon.$$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu ∞ (resp. $-\infty$), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : a_n > K \text{ (resp. } < K \text{)}.$$

Věta 2.3 (Limita podposloupnosti). Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel s limitou $A \in \mathbb{R}$. Buď posloupnost $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom už $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = A$.

Věta 2.8 (VoAL) (Aritmetika limit). Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel a mějme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \in \mathbb{R}^*$. Potom platí:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = A + B$, máli pravá strana smysl.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B$, máli pravá strana smysl.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, máli pravá strana smysl.

Nedefinované výrazy: $\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0 \cdot (-\infty), \frac{\infty}{\infty}, 0^0, 1^\infty, \infty^0$

Věta 2.5 ($0 \cdot$ omezená). Necht' $\lim a_n = 0$ a necht' posloupnost $\{b_n\}$ je omezená. Potom $\lim a_n b_n = 0$.

Věta ze společného semináře (o posloupnosti s kladnými členy). Necht' $k \in \mathbb{N}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných nezáporných čísel splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}$. Pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}$$

Věta (O dvou policajtech). Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou tři posloupnosti reálných čísel splňující:

- $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A \in \mathbb{R}^*$,

potom je $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$.

Věta 2.9 ($\frac{\rightarrow+}{0+}$). Necht' $\lim a_n = A \in \mathbb{R}, A > 0, \lim b_n = 0$ a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $b_n > 0$. Pak $\lim a_n/b_n = +\infty$.

Věta (o jednom policajtovi). Buďte $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dvě posloupnosti.

- Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí $b_n \geq a_n$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.
- Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí $b_n \leq a_n$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$.

Věta (O posloupnosti s kladnými členy). Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost kladných reálných čísel a $n \in \mathbb{N}$. Potom platí:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = A$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^m = A^m \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{A}$.

Limita funkce

Definice. Řekneme, že $A \in \mathbb{R}$ je limitou funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x \in P(c, \delta) : f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Aritmetika limit (VoAL), 2 strážníci, jednoznačnost limit platí i pro funkce.

Definice. Funkce f je *spojitá v bodě* $c \in \mathbb{R}$, pokud $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

Fakt. Polynom je spojitá funkce.

Věta 3.4 ($\frac{+}{0+}$). Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$, $A > 0$, $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ a existuje $\eta > 0$ t.ž. $g > 0$ na $P(c, \eta)$. Pak $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Věta 3.6 (VOLSF) (Limita složené funkce). Buď $c, D, A \in \mathbb{R}^*$, a jsou f a g funkce. Nechť platí, že $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = D$ a $\lim_{x \rightarrow D} f(x) = A$. Nechť platí alespoň jedna z podmínek:

(P) $\exists \eta > 0 \forall x \in P(c, \eta) : g(x) \neq D$,

(S) f je spojitá v D .

Pak platí $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = A$.

Věta 3.7 (Heine - polovina). Nechť $c, A \in \mathbb{R}^*$ a pro reálnou funkci f platí $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$. Buď $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost prvků z definičního oboru funkce f taková, že $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq c$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$. Potom platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Věta 3.26 (l'Hospitalovo pravidlo). Nechť funkce f, g mají na prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$ vlastní derivace a existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Nechť platí jedna z následujících podmínek:

(i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$,

(ii) $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$.

Potom existuje i $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a je rovna $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Vyšetření spojitosti a derivace funkce

Definice. Funkce f je *spojitá* v bodě $c \in \mathbb{R}$, pokud $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

Fakt. Polynom je spojitá funkce.

Definice. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Pak

- *derivace funkce f v bodě a* je $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
- *derivace funkce f v bodě a zleva* je $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
- *derivace funkce f v bodě a zprava* je $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Tabulka s derivacemi (odkaz, doporučeno k vytisknutí).

Věta 3.19 (Aritmetika derivací). Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť f a g jsou funkce definované na nějakém okolí bodu a . Nechť existují $f'(a) \in \mathbb{R}^*$ a $g'(a) \in \mathbb{R}^*$.

- (a) Platí $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$,
- (b) Je-li alespoň jedna z funkcí f, g spojitá v bodě a , pak $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,
- (c) Je-li funkce g spojitá v bodě a a navíc $g(a) \neq 0$, pak $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$,

vždy je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 3.20 (O derivaci složené funkce). Nechť f má derivaci v bodě $y_0 \in \mathbb{R}$, g má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 = g(x_0)$ a g je v bodě x_0 spojitá. Potom $(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$, je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 3.27 (Výpočet jednostranné derivace). Nechť reálná funkce f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$. Pak existuje $f'_+(a)$ a platí $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$. Levá strana analogicky.

Algoritmus podle Kristýny Kuncové:

1. Určíme definiční obor D_f . Na této množině pak budeme hledat derivaci.
2. Zderivujeme mechanicky tam, kde to lze (musí jít o otevřené intervaly).
3. Prokontrolujeme podmínky derivování, kraje definičních oborů, zlomky, místa, kde se láme předpis... a identifikujeme problémové body.
4. Částí podezřelí: $\arcsin t$, $\arccos t$, $\operatorname{sgn} t$, $|t|$, $\max$ a $\min$, odmocniny, funkce definované „vidličkou“.
5. V daných bodech najdeme derivaci z definice nebo z Věty o jednostranné derivaci. Neexistuje-li derivace, zkusíme najít alespoň jednostranné derivace.
6. Uděláme závěr.

Vyšetření průběhu funkce

Věta 3.22 (nutná podmínka lokálního extrému). Nechť funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ lokální extrém. Jestliže existuje $f'(x_0)$, potom $f'(x_0) = 0$.

Věta 3.25 (Vztah znaménka derivace a monotonie funkce). Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodu J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\text{Int } J$) má derivaci.

- (i) Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \text{Int } J$, pak f je rostoucí na J .
- (ii) Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \text{Int } J$, pak f je klesající na J .
- (iii) Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \text{Int } J$, pak f je neklesající na J .
- (iv) Je-li $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in \text{Int } J$, pak f je nerostoucí na J .

Definice. Funkce f je *konvexní*, pokud má v každém bodě tečnu pod grafem. (např. funkce $y = x^2$ je konvexní)

Funkce f je *konkávní*, pokud má v každém bodě tečnu nad grafem. (např. funkce $y = -x^2$ je konkávní)

Věta 3.31 (druhá derivace a konvexita). Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$ a f má na intervalu (a, b) vlastní druhou derivaci.

- (i) Jestliže $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konvexní na (a, b) .
- (ii) Jestliže $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konkávní na (a, b) .
- (iii) Jestliže $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konvexní na (a, b) .
- (iv) Jestliže $f''(x) \leq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konkávní na (a, b) .

Definice. Bod je *inflexní*, pokud se v něm mění konvexita v konkávnost či naopak.

Věta 3.28 (nutná podmínka pro inflexi). Nechť $a \in \mathbb{R}$ je inflexním bodem funkce f . Potom $f''(a)$ neexistuje nebo je rovna nule.

Definice. Nechť f je reálná funkce definovaná na nějakém okolí bodu ∞ . Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě ∞ *asymptotu* $ax + b$, jestliže $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax - b) = 0$. Analogicky definujeme asymptotu v bodě $-\infty$.

Věta 3.32 (Tvar asymptoty). Funkce f má v bodě ∞ asymptotu $ax + b$ právě tehdy, když $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$. Analogické tvrzení platí pro asymptotu v bodě $-\infty$.

Postup vyšetřování průběhu funkce

1. Určíme **definiční obor** a obor **spojitosti** funkce.
2. Zjistíme symetrie funkce: **lichost**, **sudost**, **periodicita**.

3. Dopolčítáme **limity** v „**krajních bodech** definičního oboru“.
4. Spočteme první derivaci, určíme intervaly **monotonie** a nalezneme lokální a globální **extrémy**. Určíme obor hodnot.
5. Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, na kterých funkce **konvexní/konkávní**.
6. Vypočteme **asymptoty** funkce.
7. Načrtneme **graf** funkce.

Může se hodit

Součty

- $\sum_{k=1}^n a_1 \cdot q^{k-1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ pro $q > 0$
- $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$
- $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
- $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Odhady

- $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$
- $x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$
- $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$

K limitám posloupností

Růstová škála: $\ln^\alpha n \ll n^\beta \ll a^n \ll n! \ll n^n$, kde $a > 1, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$

- $A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \dots + A^2B^{n-3} + AB^{n-2} + B^{n-1}) = (A - B) \left(\sum_{k=1}^n A^{n-k} B^{k-1} \right)$
- $(A + B)^n = A^n + \binom{n}{1} A^{n-1} B + \binom{n}{2} A^{n-2} B^2 + \dots + B^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$ pro $a > 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ pro $a \in (0, 1)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pro $a > 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ (lze odvodit z Heineho a l'Hospitala a $a^y = e^{y \log(a)}$)

Goniometrie

- $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\sin x - \sin a = 2 \cdot \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \sin\left(\frac{x-a}{2}\right)$
- Nechť $x > 0$, pak $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$

Znamé limity

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Odvozené limity

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$

Další

- $a^y = e^{y \log(a)}$
- $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, \infty) \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x \in (-\infty, 0). \end{cases}$